MS problem in halve cube

Миронов Георгий

March 2023

1 Формулировка

Поиск собственной функции графа половинного куба с минимальным множеством ненулевых значений для фиксированного количества вершин и собственного значения
Пусть G(n) - половинный куб на n вершинах. $\theta_i = \frac{(n-2i)^2-n}{2}$ - собственное значение

2 Ответ

При нечетном n ответ совпадает с ответом для графа полного куба на n вершинах / 2.
При четном n, res(n, θ_i) = $2^{\frac{n-\sqrt{n+2\theta}}{2}+\sqrt{n+2\theta}-1}$

3 Доказательство для нечетного n

Известно, что функции $\chi_u(x) = (-1)^{(u,x)}$ для всех u $\in Z_2^n$ образуют базис пространства целочисленных функций на графе G. Причем $\{\chi_u : u \in Z_2^n, |u| = i\}$ - базис собственного подпространства E_{n-2i} в пространстве собственных функций полного куба на n вершинах.
Пусть V_θ - собственное подпространство в пространстве собственных функций половинного куба для с.з θ. Тогда заметим, что $E_{n-2i} \in V_{\frac{(n-2i)^2-n}{2}}$ и $E_{-n+2i} \in V_{\frac{(n-2i)^2-n}{2}}$. Это сдедует из вложения соответсвующих базисных векторов.
Так как $\sum E_\lambda = \sum V_\theta$,то $V_{\frac{(n-2i)^2-n}{2}} = E_{-n+2i} + E_{n-2i}$
Теперь искомая функция представляется в виде суммы 2 собственных функций полного куба с с.з λ и $-\lambda$.

Тогда ответ это зануление функции на множестве вершин с нечетной суммой и 2*f на множестве вершин с четной суммой, где $f \in E_\lambda$. Для нечетных n f(x) = -f(1-x). Значит количество нулей среди множеств с четной и нечетной суммой координат поровну. Отсюда получаем ответ.

4 Доказательство для четного n

Теперь нам нужно найти собственную функцию с минимальным носителем на подграфе исходного графа, где сумма координат четна.
Заметим что для любого n res(n, $\frac{n^2-n}{2}$) $= 2^{n-1}$. Допустим, что нашлась собственная функция f такая, что S(f) - носитель f меньше res(n, θ).
Рассмотрим 4 множества вершин и значения f на них
Вершины координаты которых заканчиваются на (0,0), (1,1), (1,0), (0,1).
Со значениями (f_0, f_1, f_2, f_3) на соответсвующих множествах.
Заметим, что функции со значениями (f_1, f_0, f_2, f_3) и (f_0, f_1, f_3, f_2) на соответствующих множествах тоже будут собственными функциями. А значит собственными функциями будут и такие $f_0 - f_1, f_1 - f_0, 0, 0$ и $0, 0, f_2 - f_3, f_3 - f_2$.
$S(f_0 - f_1) \leq S(f_0) + S(f_1)$ и $S(f_2 - f_3) \leq S(f_2) + S(f_3)$. Значит либо $S(f_0 - f_1) \leq S(f)/2$ либо $S(f_2 - f_3) \leq S(f)/2$. Пусть $S(f_0 - f_1) \leq S(f)/2$, тогда посмотрим на первое множество вершин, это подграф изоморфный подграфу половинного куба с четной суммой координат в котром на 2 координаты меньше. Причем $f_0 - f_1$ это его собственная функция с с.з $\theta + 1$. По предположению индукции $S(f_0 - f_1) \geq res(n-2, \theta+1)$, получаем что $S(f)/2 \geq res(n-2, \theta+1)$ противоречие.